CALCULATRICES NON AUTORISEES

Les résultats seront encadrés. **Mode d'emploi:**

- Steve remplace l'exercice 1 par l'exercice 5
- Les autres étudiants traitent les exercices de 1 à 4.

Exercice 1
X est une variable aléatoire finie à valeurs entières $\{0, \cdots, n\}$ de loi $(p_k)_{(k\in\{0,n\}}$ où $p_k = P(X = k)$, on considère la fonction g_X définie sur $\mathbb{R}$ par $g_X(x) = \sum_{k=0}^{k=n} p_k x^k$, g_X est appelée **fonction caractéristique de** X.

1. Exemples: déterminer la fonction caractéristique
   - d'une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p
   - d'une variable aléatoire binomiale de paramètres n et p
2. On revient au cas général
   (a) Déterminer les expressions de g'_X et g''_X,
   (b) En déduire que $E(X) = g'_X(1)$ et trouver l'expression de V(X) en fonction de $g'_X(1)$ et $g''_X(1)$.
   (c) Retrouver ainsi l'espérance et la variance d'une loi binomiale.
   (d) Retrouver ainsi l'espérance et la variance d'une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
   (e) Montrer, X étant toujours une variable aléatoire finie à valeurs entières, que, pour tout élément s de $]0, 1]$, $g_X(s) = E(s^X)$, Précisez quel théorème vous utilisez.

Exercice 2 Soit n un entier naturel non nul, on considère n boîtes numérotées de 1 à n, notées $B_1, B_2, \ldots, B_n$.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la boîte B_k contient k boules, elles-mêmes numérotées de 1 à k.
L'expérience consiste à choisir une boîte au hasard puis à en extraire une boule (toujours au hasard).
On note Xla variable aléatoire égale au numéro de la boîte choisie et Y la variable égale au numéro de la boule tirée.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
2. En déduire la loi de Y (on laissera le résultat sous forme de somme.
3. Calculer, à l'aide d'une interversion de variables, l'espérance de Y.
4. Calculer, à l'aide d'une interversion de variables, la variance de Y.

Exercice 3
Une machine à sous est constituée de 4 roues mobiles. Chacune est partagée en 8 secteurs identiques dont un seul porte l'inscription 'gagné'. On fait tourner chaque roue derrière un panneau qui est muni d'une fenêtre.
La rotation de chaque roue amène au hasard l'un quelconque de ses secteurs dans la fenêtre de la machine.
Pour une mise de 2euros on a le droit d'immobiliser les roues de son choix et de faire tourner les autres.
Pour gagner à ce jeu, il faut amener tous les secteurs gagnants dans la fenêtre de la machine.
Au départ, aucun secteur gagnant n'est visible.
On a droit à 5 essais. Si on perd, on perd donc 10 euros. Si on gagne en c essais, on gagne une somme égale à Seuros d'où on décompte $2 * x$ euros correspondant à la mise totale.
Par exemple Si $S = 20$

- Si à l'essai 1, les roues 1 et 3 ont affiché leur secteur gagnant et pas les deux autres.

- On réalise un second essai. On immobilise les roues 1 et 3 et on fait tourner les roues 2 et 4 , si la roue 2 a affiché son secteur gagnant et pas la roue 4.
- On réalise un troisième essai gardant immobiles les roues 1,2,3 et en faisant tourner uniquement la roue 4. Si à ce moment la roue 4 affiche son secteur gagnant, on dit qu'on a gagné à ce jeu.
- Dans ce cas, le gain du joueur est de $20 - 3 \times 2 = 14$ euros.
- Si le joueur a perdu la partie, son gain est de -10 euros.

1. Lors d'un premier essai, on fait donc tourner les 4 roues. Soit X_1 le nombre de secteurs gagnants obtenus. Quelle est la loi de X_1? Quelle est la probabilité de gagner à ce premier essai?
2. On suppose que ce premier essai n'est pas concluant et on procède à un deuxième essai, en bloquant les roues ayant éventuellement, amené le bon secteur.
   (a) Sachant que l'événement $(X_1 = k)$, avec $0 \leq k \leq 3$, est réalisé, quelle est la probabilité de gagner à ce deuxième essai?
   (b) A l'aide de la formule des probabilités totales en déduire la probabilité de gagner en exactement deux essais.
3. On définit la variable Y par:
   - Si le joueur a perdu, on pose $Y = 0$
   - Sinon, Y désigne le nombre d'essais effectués pour gagner à ce jeu.

   (a) Donner la probabilité qu'une roue donnée n'amène jamais le secteur gagnant au bout de k essais consécutifs. En déduire la probabilité pour qu'une roue donnée amène le secteur gagnant en au plus k essais.
   (b) En déduire, pour k compris entre 1 et 5,l'expression de $P(Y \leq k)$ c'est-à-dire la probabilité de gagner en au plus k essais.
   (c)
   - Trouver, pour $\in [\![1, 5]\!]$, une relation entre $P(Y = k)$, $P(Y \leq k)$ et $P(Y \leq k - 1)$
   - En déduire la loi de Y.

   (d) On note G le gain du joueur. Donner la loi de G ainsi que l'expression de son gain moyen.
   (e) Comment déterminer S pour que le jeu soit considéré comme équitable?

Exercice 4

On considère E un espace vectoriel rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Dans tout l'exercice on associe à tout nombre réel a l'endomorphisme Φ_a de $\mathbb{R}^3$ défini par les conditions :

$$\begin{cases} \Phi_a(e_1) = e_1 + 2e_2 + e_3 \\ \Phi_a(e_2) = -e_1 + (a-3)e_2 + (a-1)e_3 \\ \Phi_a(e_3) = -2e_1 - 4e_2 + ae_3 \end{cases}$$

1. Ecrire la matrice de Φ_a dans la base (e_1, e_2, e_3).
2. On considère Φ_0.
   (a) Montrer que Φ_0 est un automorphisme.
   (b) Déterminer la matrice de son automorphisme réciproque, dans la base (e_1, e_2, e_3).
3. On revient au cas général
   (a) Déterminer les valeurs du paramètre a pour lesquelles Φ_a est de rang 3.
   (b) Déterminer, pour chaque valeur du paramètre a, le noyau de Φ_a, noté $Ker(\Phi_a)$. et l'image de Φ_a notée $Im(\Phi_a)$ (on demande dans chaque cas une base et la dimension de $Ker(\Phi_a)$ et $Im(\Phi_a)$).
   (c) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles le vecteur $e_1 - e_2 - e_3$ appartient à l'image de Φ_a.

4. On considère maintenant les trois vecteurs : $\begin{cases} f_1 = e_1 + 3e_2 - e_3 \\ f_2 = 2e_1 + 4e_2 - e_3 \\ f_3 = e_3 \end{cases}$

   (a) Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de E, on note $\mathcal{B}'$ cette base.

   (b) Calculer $\Phi_1(f_1), \Phi_1(f_2), \Phi_1(f_3)$, en déduire la matrice de Φ_1 dans la base $\mathcal{B}'$.

5. On considère l'endomorphisme Φ_{-2}.
   Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note E_λ l'ensemble défini par $\{u \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } \Phi_{-2}(u) = \lambda u\}$

   (a) Déterminer les valeurs λ telles que $E_\lambda \neq \{0\}$ (λ *n'est pas forcément un nombre entier*).

   (b) Pour chacune des valeurs de λ trouvée à la question précédente, déterminer E_λ (c'est-à-dire donner une base et la dimension de E_λ.

   (c) En déduire une base (v_1, v_2, v_3) dans laquelle la matrice de Φ_{-2} est une matrice diagonale que l'on précisera.

Pour Steve: remplacer l'exercice 1 par l'exercice suivant:
Exercice 5 Un individu gravit un escalier. A chaque fois, avant de faire un pas, il lance une pièce non équilibrée donnant pile avec la probabilité p (avec $0 < p < 1/2$) et progresse d'une marche s'il obtient pile et enjambe deux marches d'un coup s'il obtient face.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n le nombre de marches gravies à l'issue des n premiers pas et X'_n le nombre de fois où l'individu a progressé par enjambées de 2 marches au cours des n premiers pas.

   (a) Déterminer une relation simple liant X_n et X'_n. En déduire la loi de X_n.

   (b) Donner les valeurs de l'espérance et de la variance de X_n.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit Y_n le nombre aléatoire de pas justes nécessaires pour atteindre ou dépasser la $n^{\text{ème}}$ marche.

   (a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire Y_n?

   (b) Déterminer la loi de Y_1, puis celle de Y_2 et préciser l'espérance de ces deux variables aléatoires.

   (c) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq 3 \qquad P(Y_n = k) = pP(Y_{n-1} = k-1) + (1-p)P(Y_{n-2} = k-1)$

   (d) Montrer que pour $n \geq 3$, $E(Y_n) = p.E(Y_{n-1}) + (1-p)E(Y_{n-2}) + 1$.

3. On considère l'ensemble E des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que $\forall n \geq 3, \quad u_n = pu_{n-1} + (1-p)u_{n-2} + 1$

   (a) Montrer qu'il existe un réel α, que l'on déterminera, tel que la suite (αn) appartient à E.

   (b) Montrer que (u_n) appartient à E si et seulement si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $v_n = u_n - \alpha n$ vérifie la relation: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = pv_{n-1} + (1-p)v_{n-2}$.

   (c) En déduire la valeur de $E(Y_n)$.